LIGNES DE NIVEAU ET SERIES DE FOURIER ABSOLUMENT CONVERGENTES

PAR
J.-P. KAHANE ET Y. KATZNELSON
(*Orsay*) (*Jérusalem*)

ABSTRACT

Pour une fonction continue f, définie sur un compact de la droite réelle où du cercle, l'on note par $C(f)$ la sous-algèbre auto-adjointe uniformement fermée engendrée par f. L'on construit des fonctions f telles que les seules fonction dans $C(f)$ qui admettent localement une représentation comme somme d'une série de Fourier absolument convergente sont les constantes. Sur un intervalle une telle f peut être construite monotone ou bien Lipschitzienne 1/2.

On désigne par A la classe des fonctions continues 2π-périodiques sur la droite, dont la série de Fourier converge absolument; par A^* la classe des fonctions définies sur la droite, et qui coïncident localement avec une fonction de la classe A; par $A(E)$ la classe des fonctions définies sur un ensemble compact E de la droite, et prolongeables en fonctions de la classe A^*.

Si f est une fonction continue réelle sur une partie E de la droite ou du cercle, la notation $F \circ f$ signifie que la fonction réelle F est définie sur $f(E)$ te que $(F \circ f)(t) = F(f(t))$. L'ensemble des fonctions $F \circ f$ est la sous-algèbre fermée engendrée par f dans l'algèbre *réelle* des fonctions continues réelles sur E; nous la noterons $C(f)$.

Notre objet est de construire des fonctions f pour lesquelles $C(f) \cap A^*$ (resp. $C(f) \cap A$, resp. $C(f) \cap A(E)$) ne contient que les constantes. On démontrera trois théorèmes.

THÉORÈME 1. *Il existe qne fonction f continue et croissante (au sens large) sur la droite, non constante, et telle que $C(f) \cap A^*$ ne contienne que les constantes.*

THÉORÈME 2. *Etant donné une fonction croissante et sous-additive $\phi(h)$ ($h > 0$), telle que* $\limsup_{h \to 0} (h^{-1/2}\, \phi(h)) > 0$, *il existe une fonction f_0 2π-périodique, dont le module de continuité est majoré par $\phi(h)$, non constante, et telle que $C(f_0) \cap A$ ne contienne que les constantes.*

Received August 22, 1968.

THÉORÈME 3. *Soit E un ensemble fermé partout non-helsonien (c'est-à-dire que toute portion de E, F, porte une fonction continue qui n'est pas dans $A(F)$). Il existe une fonction f continue sur E, non constante, et telle que $C(f) \cap A(E)$ ne contienne que les constantes.*

Démonstration du théorème 1. Soit r_n et b_n deux suites positives telles que

$$\frac{1}{2}r_n \geqq b_n = r_{n+1} + r_{n+2} + \cdots$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(2^{-n}\log \frac{r_n}{r_{n+1}}\right) > 0.$$

Soit E l'ensemble des points $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n r_n$ ($\varepsilon_n = 0$ ou 1), et f une fonction continue et croissante, constante sur les intervalles contigus à E. Supposons $g \in C(f)$. En posant $h = |g(b_0) - g(0)|$, il existe pour chaque n une portion E_n de E, de diamètre b_n, telle que $|g(\sup E_n) - g(\inf E_n)| \geqq 2^{-n}h$. En l'un des points $t = \sup E_n$ ou $t = \inf E_n$, on a

$$\left|\int_{b_n}^{r_n - b_n} (g(t+s) - g(t-s))\,\frac{ds}{s}\right| \geqq 2^{-n} h \log \frac{r_n - b_n}{b_n}.$$

Si $g \in A^*$, le premier membre tend vers zéro avec $1/n$, donc $h = 0$. De même g prend mêmes valeurs aux extrémités d'une portion quelconque de E, donc g est constante.

Démonstration du théorème 2. L'hypothèse $\limsup (h^{-1/2}\phi(h)) > 0$ entraine l'existence d'un $\beta > 0$ et d'une suite croissante d'entiers positifs n_j tels que

$$\phi(2^{-2j}(n_1 n_2 \cdots n_j)^{-2}) > \beta 2^{-j}(n_1 n_2 \cdots n_j)^{-1}.$$

Quitte à imposer la condition $\sum n_j^{-1} < \infty$, on a aussi

$$(*) \quad \phi(2^{-j}(n_1 n_2 \cdots n_j(2n_1 - 1)(2n_2 - 1)\cdots(2n_j - 1))^{-1}) > \gamma 2^{-j}(n_1 n_2 \cdots n_j)^{-1}$$

pour un certain $\gamma > 0$. Posons $a_0 = b_0 = 1$,

$$c_j = \frac{a_{j-1}}{n_j}, \quad a_j = \frac{c_j}{2(2n_j - 1)}, \quad b_j = \frac{b_{j-1}}{2n_j}$$

($j = 1, 2, \cdots$); alors (*) s'écrit $\phi(a_j) > \gamma b_j$.

Désignons par A_j, B_j, C_j respectiverent l'ensemble des multiples de a_j, b_j, c_j contenus dans le segment $I = [0,1]$, et par $\alpha_{j,k}$ l'une quelconque des portions

A_j limitées par deux points consécutifs de C_j ($k = 1, 2, \cdots c_j^{-1}$). On va construire une fonction continue f, appliquant I sur I, et, pour chaque j, appliquant A_j sur B_j; on vérifiera que son module de continuité $\omega_f(h)$ est majoré, à une constane multiplicative près, par $\phi(h)$; on montrera ensuite que $C(f) \cap A(I)$ ne contient que les constantes.

Posons $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et définissons f sur C_1 par linéarité. Ainsi, en deux multiples consécutifs de c_1, f prend pour valeurs des multiples consécutifs de $2b_1$. Soit $f'_{1,k}$ et $f''_{1,k}$ les valeurs de f aux extrémités de $\alpha_{1,k}$; elles diffèrent de $2b_1$; et soit $f_{1,k} = (f'_{1,k} + f''_{1,k})/2$; c'est un multiple impair de b_1. Les extrémités de $\alpha_{1,k}$ sont des multiples pairs de a_1. Posons $f(x) = f_{1,k}$ quand x est un multiple impair de a_1 dans $\alpha_{1,k}$, et $f(x) = f_{1,k} \pm b_1$ quand x est un multiple pair de a_1 dans $\alpha_{1,k}$. Le choix des signes $+$ et $-$ sera précisé plus tard; nous imposons seulement pour le moment que 1°) ce choix respecte les valeurs prises par f sur C_1, c'est-à-dire aux extrémités des $\alpha_{1,k}$ 2°) pour chaque $\alpha_{1,k}$, le signe $+$ et le signe $-$ se présentent le même nombre de fois, c'est à dire n_1 fois. Ainsi construite sur A_1, f applique A_1 sur B_1, et de plus

a) chaque $\alpha_{1,k}$ est appliqué dans un intervalle de longeur $2b_1$

b) deux multiples consécutifs de a_1 sont appliqués sur deux multiples consécutifs de b_1

c) à chaque couple de multiples consécutifs de b_1 correspondent exactement b_1/a_1 couples de multiples consécutifs de a_1. (Voir figure).

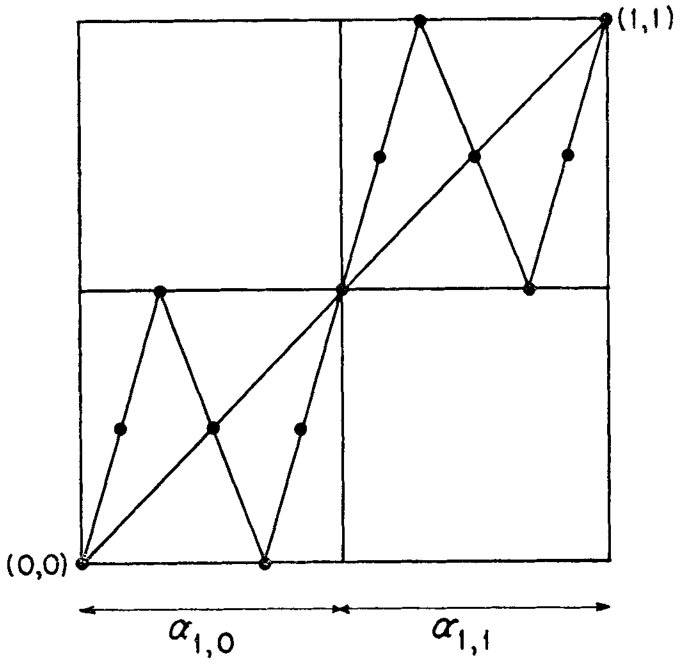

Figure dans le cas $n_1 = 2$.

On définit alors f sur C_2 par linéarité entre deux points consécutifs de A_1, puis f sur A_2 par le même procédé que ci-dessus (en remplaçant b_1 par b_2, $\alpha_{1,k}$ par $\alpha_{2,k}$, etc $\cdots$) et ainsi de suite. A chaque stade, f applique A_j sur B_j, avec les propriétés a), b), c) (l'indice j remplaçant l'indice 1).

Par continuité, f est défini sur I, et son module de continuité satisfait évidemment à $\omega_f(c_j) \leqq 4b_j$ pour chaque j. Si $a_j \leqq h \leqq c_j$, on a donc

$$\omega_f(h) \leqq 4b_j \leqq \frac{4}{\gamma}\phi(a_j) \leqq \frac{4}{\gamma}\phi(h).$$

Si $c_j \leqq h \leqq a_{j-1}$, posons $pc_j \leqq h \leqq (p+1)c_j$ (p entier); on a

$$\omega_f(h) \leqq (p+1)\omega_f(c_j) \leqq 8\,\frac{h}{c_j}b_j = 4h\,\frac{b_{j-1}}{a_{j-1}} \leqq \frac{4}{\gamma}\,h\,\frac{\phi(a_{j-1})}{a_{j-1}}$$

donc, compte tenu de la sous-additivité de ϕ,

$$\omega_f(h) \leqq \frac{8}{\gamma}\phi(h).$$

Reste à achever la construction en précisant le choix des signes $+$ et $-$, et à montrer alors que les seules fonctions F, définies sur I, pour lesquelles $F \circ f \in A(I)$, sont les constantes.

Rappelons que la "norme-pseudomesure" d'une measure μ à support compact sur la droite est

$$\|\mu\|_{PM} = \sup_u |\hat{\mu}(u)| = \sup_u \left|\int e^{iux}d\mu(x)\right|.$$

Si μ est portée par un compact E, c'est la norme de μ comme forme linéaire sur l'espace de Banach $A(E)$. On sait, par une construction de Rudin et Shapiro, que toute progression arithmétique de $2n$ termes porte une mesure μ, somme de n masses ± 1 disposées sur les n points de la progression, telle que $\hat{\mu}(0) = 0$ et $\|\mu\|_{PM} < C\sqrt{n}$ (ici comme dans la suite, C est une constante absolue, mais pas nécessairement la même d'une formule à l'autre); de plus, pour toute restriction ν de μ à un intervalle, on a aussi $\|\nu\|_{PM} < C\sqrt{n}$ ([1], p. 134).

Soit μ_j' une telle measure portée par les $2n_j - 2$ points

$$0,\ 2a_j,\ 4a_j, \cdots,\ (4n_j - 6)a_j$$

et μ_j'' une telle mesure portée par les $1/c_j$ points

$$0,\ c_j,\ 2c_j, \cdots,\ 1 - c_j.$$

Posons

$$\mu_j = \mu_j' * \mu_j'' * (\delta_{2a_j} - \delta_{a_j})$$

où δ_x désigne la masse unité au point x.

Sur chaque $\alpha_{j,k}$, la restriction de μ_j est une somme de $4(n_j-1)$ masses ponctuelles ± 1; elle charge tous les multiples impairs de a_j à l'exception du dernier, $n_j - 1$ de ces multiples étant chargés de la masse $+1$ et $n_j - 1$ de la masse -1; et elle charge de même tous les multiples pairs, à l'exception des extrémités. En tout point x multiple pair de a_j dans $\alpha_{j,k}$, on a donc $\mu(x) = \pm 1$, et less valeurs $+1$ et -1 sont prises le même nombre de fois. Pour définir f sur A_j, convenons de poser

$$f(x) = f_{j,k} + \mu_j(x) b_j,$$

si x est un multiple pair de a_j, ce qui est bien compatible avec les conditions imposées. Alors, en posant $f_{j,k} = (2l+1)b_j$, l'image par f de la restriction de μ_j à $\alpha_{j,k}$ est

$$(n_j - 1)(\delta_{2(l+1)b_j} - \delta_{2lb_j}).$$

Comme chaque valeur de l correspond au même nombre de valeurs de k (d'aprés la propriété c)), à savoir $2b_j/c_j$, l'image de μ_j par f est la mesure

$$(n_j - 1)\ \frac{2b_j}{c_j}(\delta_1 - \delta_0).$$

Il suit de là que, si $F \circ f \in A$, on a

$$(**)\qquad \int F(f(x))d\mu_j(x) = (n_j - 1)\frac{2b_j}{c_j}(F(1) - F(0)).$$

Or on a

$$\|\mu_j\|_{PM} \leqq 2\|\mu_j'\|_{PM}\|\mu_j''\|_{PM} \leqq C\left(\frac{2n_j - 2}{c_j}\right)^{1/2}$$

et, pour chaque entier λ, on a

$$\left|\int e^{i\lambda x}\ d\mu_j(x)\right| \leqq \|\mu_j' * \mu_j''\|_M |\lambda| a_j = \frac{(2n_j - 2)|\lambda| a_j}{c_j} = 0(1).$$

D'autre part, l'hypothèse $\sum n_j^{-1} < \infty$ entraine que $a_j b_j^{-2}$ tend vers une limite finie non nulle quand $j \to \infty$, donc le rapport

$$\left(\frac{2n_j - 2}{c_j}\right)^{1/2} \Big/ \frac{2(n_j - 1)b_j}{c_j}$$

est toujours compris entre deux nombres positifs. Il s'ensuit que les pseudomesures $\dfrac{c_j}{2(n_j - 1)b_j}\mu_j$ sont bornées en normes, et qu'elles transforment chaque exponentielle $e^{i\lambda x}$ en une suite tendant vers zéro; elles tendent donc faiblement vers 0 sur A.

Revenant à (**) on voit que $F \circ f \in A$ entraine $F(1) = F(0)$.

Quitte à remplacer les μ_j par leurs restrictions à un intervalle donné de la forme $[kc_i, kc_i + 2a_i[$, aux extrémités duquel f prend les valeurs $2lb_i$ et $2(l+1)b_i$, on obtient de même $F(2(l+1)b_i) = F(2lb_i)$. La fonction F étant nécessairement continue, l et i étant arbitraires, F est constante.

On a ainsi construit une fonction f continue et non constante sur I, telle que $\omega_f(h) \leqq (8/\gamma)\phi(h)$, et telle que $C(f) \cap A(I)$ ne contienne que des constantes. On obtient la fonction désirée f_0 en multipliant f par $\gamma/8$ et en en faisant un prolongement périodique convenable.

Démonstration du théorème 3. On utilisera le fait suivant: si F est un fermé non helsonien totalement discontinu, F porte des fonctions continues, à valeurs 0 ou 1, dont les normes dans $A(F)$ sont arbitrairement grandes.

Etant donné l'ensemble parfait E partout non helsonien, on peut d'abord, quitte à remplacer les composantes connexes de E non réduites à des points par des ensembles de Cantor, remplacer E par un ensemble plus petit, partout non helsonien, et totalement discontinu: désignons désormais par E ce nouvel ensemble. On appellera "portion centrale" de E une portion de E qui ne contient aucune des extrémités de E. Soit $F_{j,k}$ $(j = 0, 1, \cdots;\ k = 0, \cdots 2^j - 1)$ une suite de portions de E ainsi definies: $F_{0,0}$ est une portion centrale de E; alors $E \setminus F_{0,0}$ est formé de deux portions; $F_{1,0}$ et $F_{1,1}$ sont respectivement portions centrales de celle de gauche et de celle de droite; de manière générale, le complémentaire de $\bigcup_{\substack{i<j \\ 0 \leqq k < 2^i}} F_{i,k}$ dans E est formé de 2^j portions, au centre desquelles on définit, de gauche à droite dans l'ordre des k croissants, les portions $F_{j,k}$ $(0 \leqq k < 2^j)$.

Les $F_{j,k}$ sont non helsoniens. On peut donc définir f sur $F_{j,k}$ de façon que 1°) f soit continue, à valeurs $k2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$ 2°) $\|f - k2^{-j}\|_{A(F_{j,k})} \geqq 2^j$. Grâce à la condition 1°), on peut prolonger f, ainsi définie sur $\bigcup F_{j,k}$, en une fonction continue sur E, à valeurs dans $I = [0, 1]$.

Supposons maintenant $F \circ f \in A(E)$. Les normes $\|F \circ f\|_{A(Fj,k)}$ sont uniformément bornées. Mais, sur chaque $F_{j,k}$,

$$F \circ f = F(k2^{-j}) + 2^j(f - k2^{-j})(F(k+1)2^{-j}) - F(k2^{-j})).$$

Compte tenu de la condition 2°), on a

$$\sup_{j,k} 2^{2j} \left| F(k+1)2^{-j}) - F(k2^{-j}) \right| < \infty,$$

ce qui, joint à la continuité de F, entraine que F est constante. Le théorème 3 est démontré.

Remarques sur le théorème 1. Si f est une fonction continue et croissante (au sens large) sur la droite, les lignes de niveau de f sont des points isolés et des intervalles fermés. Si la réunion de ces intervalles fermés n'est pas dense sur la droite, $C(f) \cap A^*$ contient des fonctions non constantstes. Si elle est dense sur la droite, la fermeture de son complémentaire est un ensemble parfait totalement discontinu E. Si E est assez "gross", par exemple si la dimension de Hausdorff de E est > 0, $C(f)$ contient des fonctions g croissantes non constantes dont le module de continuité satisfait à la condition

$$\int_0^1 \sqrt{\omega_g(h)}\, \frac{dh}{h} < \infty,$$

et il résulte d'un théorème de Zygmund qu'une telle fonction g appartient à A^*. On a construit un ensemble E assez "mince" pour qu'il n'en soit pas ainsi.

En construisant E comme un ensemble "de translation", non nécessairemeut symétrique ([1], p. 18), on peut vérifier la proposition swivente: étant donné une fonction croissante et sous-additive $\phi(h)$ $(h > 0)$, telle que $\limsup_{h\to 0}(\phi(h)\log(1/h)) = \infty$, il existe une fonction f croissante, non constante, dont le module de continuité est majoré par $\phi(h)$, et telle que $C(f) \cap A^*$ ne contienne que les constantes. D'après le théorème de Zygmund rappelé ci-dessus, on ne peut pas remplacer $\log 1/h$ par $(\log 1/h)^\alpha$ avec $\alpha > 2$.

Remarques sur le théorème 2. Ici les lignes de niveau de f ne sont plus des intervalles, mais des ensembles assez enchevetrés. La fonction f construite est uniformément distribuée sur $[0, 1]$, lipschitzienne d'ordre $1/2$, et les lignes de niveau ont toutes une mesure de Hausdorff finie et non nulle en dimension $1/2$.

On sait, par un théorème de S. Bernstein, que $f \in A$ dès que

$$\int_0^1 \omega_f(h) h^{-3/2} dh < \infty.$$

La condition $\limsup_{h\to 0}(h^{-1/2}\phi(h)) > 0$ est donc la meilleure possible de ce type: on ne peut pas remplacer $h^{-1/2}$ par $A(h)h^{-1/2}$ avec $\lim_{h\to 0} A(h) = \infty$.

La démonstration peut être simplifiée, en évitant le recours à une suite de pseudomesures tendant faiblement vers zéro, si l'on impose à ϕ la condition plus forte $\limsup_{h\to 0}(h^{-1/2}\phi(h)) = \infty$.

Remarques sur le théorème 3. La démonstration donne la proposition générale que voici. Soit E un compact parfait totalement discontinu, $C(E)$ l'espace de Banach réel des fonctions continues réelles sur E, et $B(E)$ un espace de Banach réel formé de fonctions continues réelles sur E, partout distinct de $C(E)$ (c'est à dire que, pour tout ouvert non vide de E, Ω, il existe une f de $C(E)$ qui ne coïncide sur Ω avec aucune fonction de $B(E)$). Alors il existe une sous-algèbre fermée de $C(E)$ contenant une fonction f non constante, et dont l'intersection avec $B(E)$ ne contient que les constantes. Notant par U l'espace de Banach des fonctions continues sur T, dont les series de Fourier convergent uniformement, l'on peut démontrer ainsi que si tout ouvert non vide de E est de mesure positive, il existe une fonction non constante $f \in C(E)$ telle que $C(f) \cap U(E)$ ne contient que les constantes.

Reference

1. J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonomètriques*, Hermann, 1963.

Université d'Orsay,
Université Hebraïque de Jérusalem